Φράγματα - φραγμένα σύνολα

Έστω $(E, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο κ' A ένα υποσύνολο του E

(i) Ένα στοιχείο $a \in E$ λέγεται άνω φράγμα του συνόλου A.
αν ισχύει $x \leq a$ $\forall x \in A$.

(ii) Ένα στοιχείο $a \in E$ λέγεται κάτω φράγμα του συνόλου A.
αν ισχύει $a \leq x$ $\forall x \in A$.

(iii) Το A λέγεται άνω φραγμένο αν έχει (ένα τουλάχιστον) άνω φράγμα.

(iv) Το A λέγεται κάτω φραγμένο αν έχει (ένα τουλάχιστον) κάτω φράγμα

(v) Το A λέγεται φραγμένο αν είναι άνω κ' κάτω φραγμένο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός υποσυνόλου A ενός διατεταγμένου συνόλου $(E, \leq)$ μπορεί είτε να ανήκει είτε να μην ανήκει στο σύνολο A.

Πρόταση: Αν $(E, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο κ' $A \subseteq E$ ∃ το πολύ ένα άνω φράγμα a του A με $a \in A$ (το ίδιο ισχύει κ' για το κάτω φράγμα)

Απόδειξη: Έστω a, b α.φ του A με $a \in A$ κ' $b \in A$. Νδο $a = b$.
Εφόσον το a είναι α.φ του A κ' $b \in A$ θα έχουμε $b \leq a$.
Εφόσον το b είναι α.φ του A κ' $a \in A$ θα έχουμε $a \leq b$.

Εφόσον η $\leq$ είναι αντισυμμετρική προκύπτει $a = b$

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο κ' $A \subseteq E$

(i) Ένα στοιχείο $a \in A$ ώστε a α.φ του A ονομάζεται μέγιστο στοιχείο του A (maximum)
[Από την προηγούμενη πρόταση αν ∃ θα είναι μοναδικό]
Στην περίπτωση συμβολίζουμε $a = \max A$.

(ii) Ένα στοιχείο $b \in A$ ώστε b κ.φ του A λέγεται ελάχιστο (minimum) στοιχείο του A. [Αν ∃ είναι μοναδικό]. Συμβολίζουμε $b = \min A$.

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ μ. δ. σύνολο (μερικά διατεταγμένο), $A \subseteq E$ κ' $a, b \in E$

(i) Το a λέγεται ελάχιστο α.φ ή supremum του συνόλου A αν το a είναι το ελάχιστο από τα α.φ του A

δηλ.
α) $x \leq a \quad \forall x \in A$
β) Αν $k \in E$ κ' ισχύει $x \leq k \; \forall x \in A$, τότε $a \leq k$.

Το supremum του A αν ∃ είναι μοναδικό. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε $a = \sup A$.

(ii) Το b λέγεται μέγιστο κ.φ ή infimum του συνόλου A αν το b είναι το μέγιστο από τα κ.φ του A.

δηλ. α) $b \leq x \quad \forall x \in A$
β) Αν $\lambda \in E$ με $\lambda \leq x \; \forall x \in A$ τότε $\lambda \leq b$.

Το infimum αν ∃ είναι μοναδικό. Συμβολίζεται $b = \inf A$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: (i) Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο a (δηλ $a = \max A$) τότε $a = \sup A$

Απόδειξη: Το a είναι α.φ του A (εξ' ορισμού του μεγίστου στοιχείου)
Αν k οποιοδήποτε α.φ του A. (δηλ $x \leq k \; \forall x \in A$)
τότε, αφού $a \in A$, θα έχουμε $a \leq k$
Επομένως, $a = \sup A$

(ii) Αν το A έχει ελάχιστο στοιχείο το b (δηλ. $b = \min A$), τότε $b = \inf A$
[απόδειξη: όμοια]

(iii) Αν το A έχει supremum κ' ισχύει $\sup A \in A$, τότε το A έχει μέγιστο στοιχείο το $\sup A$.

Απόδειξη: Εφόσον $\sup A \in A$ κ' το $\sup A$ είναι α.φ. του A (από τον ορισμό του supremum) προκύπτει ότι το $\sup A$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A, δηλαδή $\max A = \sup A$.

(iv) Αν το A έχει infimum κ' $\inf A \in A$ τότε το $\inf A$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του A δηλαδή $\min A = \inf A$.

(v) Αν το A έχει supremum κ' $\sup A \notin A$, τότε το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

(vi) Αν το A έχει infimum κ' $\inf A \notin A$, τότε το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο, $A \subseteq E$ κ' $a, b \in A$.

(i) Το a λέγεται maximal (μεγιστικό ή γενικευμένο μέγιστο) του A, αν δεν $\exists\, x \in A$ με $a < x$

(ii) Το b λέγεται minimal (ελαχιστικό ή γενικευμένο ελάχιστο) του A αν $\nexists\, x \in A$ με $x < b$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: a maximal του $A \iff \forall x \in A$ με $a \leq x$ ισχύει $a = x$
b minimal του $A \iff \forall x \in A$ με $x \leq b$ ισχύει $x = b$

Ένα σύνολο A μπορεί να μην έχει ή να έχει ακριβώς ένα min, max, sup, inf. Αντίθετα, (όπως θα δούμε σε ασκ.) μπορεί να έχει περισσότερα από ένα maximal ή minimal